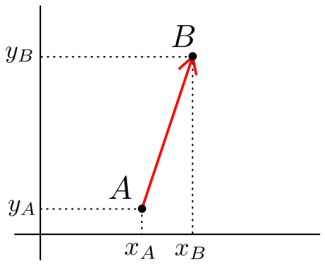
CP 6 - Nombres complexes

Partie I - Nombres complexes et géométrie

1 Complexes et vecteurs

Soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points du plan.



Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

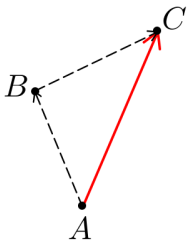
$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

Traduction dans les complexes : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe :

$$\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$$

Remarque. *La relation de Chasles :*

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

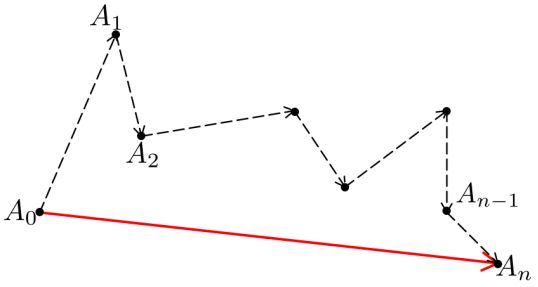


se traduit dans les complexes par le télescopage :

$$z_C - z_A = (z_C - z_B) + (z_B - z_A)$$

De façon générale, une relation de Chasles

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0A_n} &= \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{A_kA_{k+1}} \end{aligned}$$



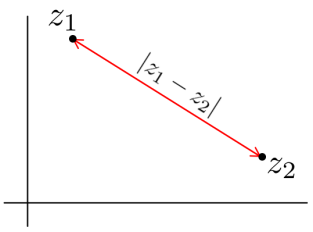
se traduit dans les complexes par le télescopage :

$$\begin{aligned} z_n - z_0 &= (z_n - z_{n-1}) + (z_{n-1} - z_{n-2}) + \cdots + (z_2 - z_1) + (z_1 - z_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \end{aligned}$$

2 Complexes et distances

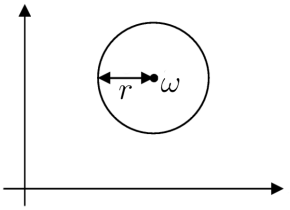
La norme $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ vaut le module de son affixe, c'est-à-dire $|z_B - z_A|$.

Conclusion : pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, la quantité $|z_1 - z_2|$ est la distance dans le plan entre z_1 et z_2.

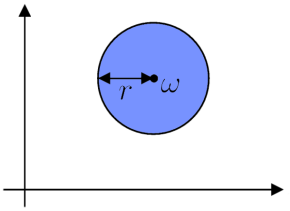


Conséquences : si $\omega \in \mathbb{C}$, et $r \geqslant 0$:

L'ensemble des complexes z qui vérifient $|z - \omega| = r$ correspond géométriquement au **cercle** de centre ω et de rayon r.



L'ensemble des complexes z qui vérifient $|z - \omega| \leqslant r$ correspond géométriquement au **disque** de centre ω et de rayon r.

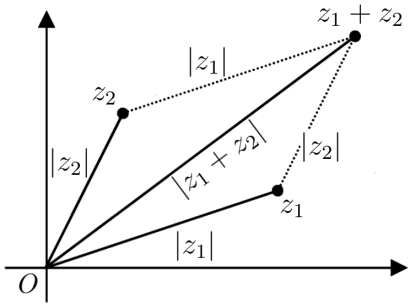


Proposition (Inégalité triangulaire)**.**
Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a

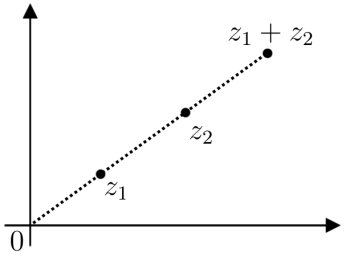
$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

*et il y a égalité **ssi** z_1 et z_2 sont "positivement liés", c'est-à-dire s'il existe un $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = kz_1$ ou $z_1 = kz_2$.*

"démonstration" géométrique :



En interprétant $|z|$ comme la distance de z à 0, on qu'il s'agit d'une inégalité triangulaire classique (chaque côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres)



Le cas d'égalité correspond à la situation où 0, z_1 et z_2 sont alignés, et z_1 et z_2 "du même côté de 0".

Remarques.

- *On a aussi* $\boxed{|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|}$.
  En effet, $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leqslant |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$.
- *Par récurrence, on a que pour tout entier $n \geqslant 2$, et tout n-uplet $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

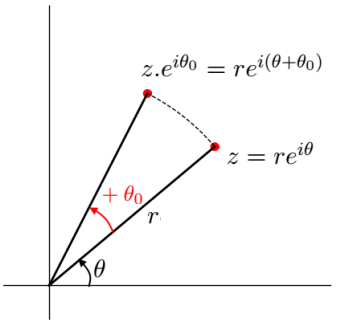
3 Complexes et rotations

Remarque. *Si l'on fixe $\theta_0 \in \mathbb{R}$, l'application :*

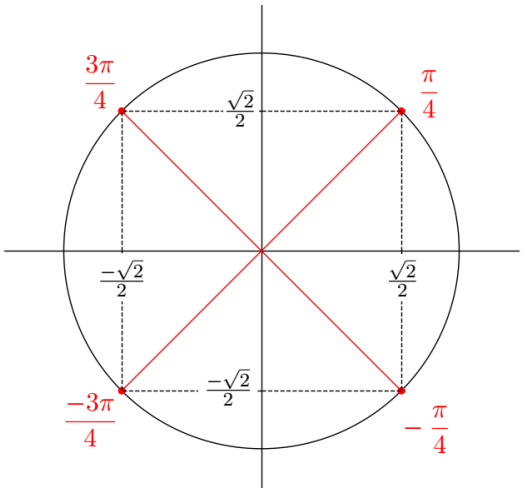
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z.e^{i\theta_0} \end{array}$$

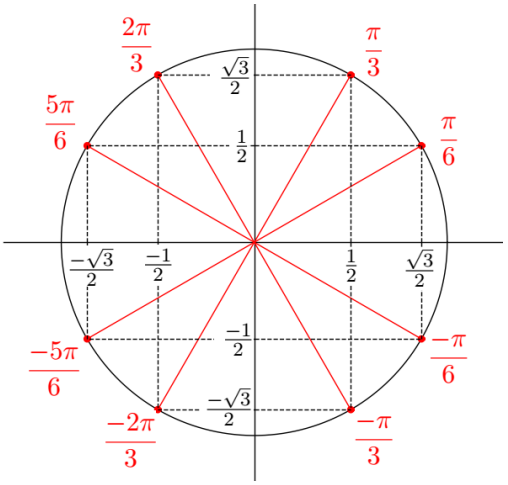
*est la **rotation** de centre 0 et d'angle θ_0.*
En effet, si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, alors

$z.e^{i\theta_0} = re^{i\theta}.e^{i\theta_0} = re^{i(\theta+\theta_0)}$ *(argument "augmenté de θ_0")*

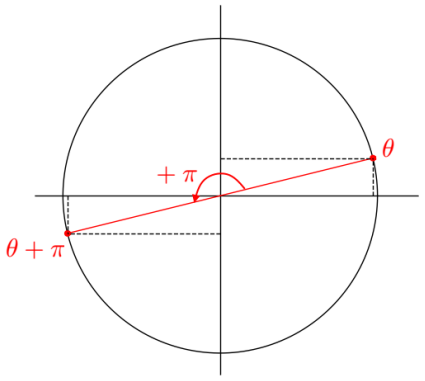


1 Valeurs remarquables de sin et cos

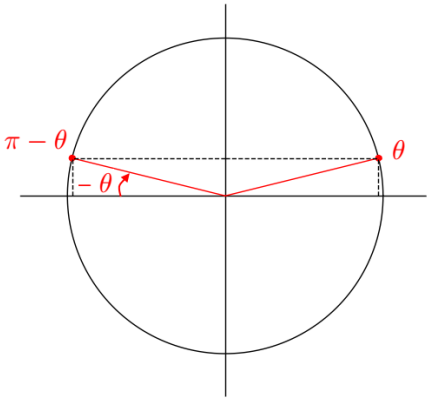




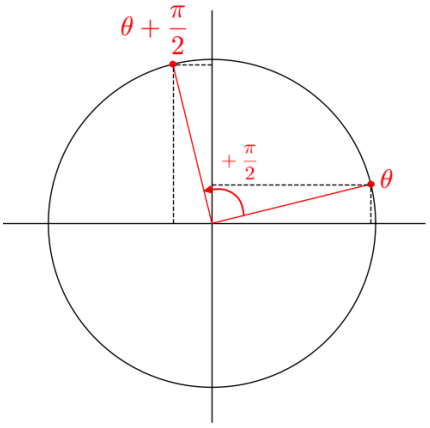
2 Relations à lire sur le cercle



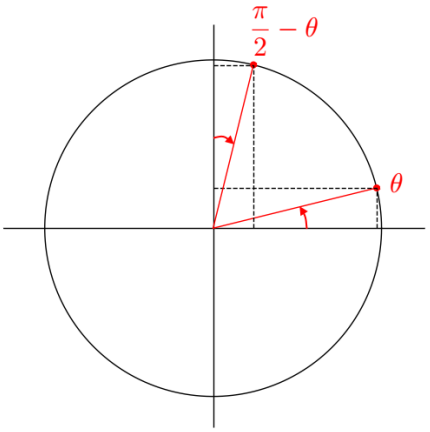
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \ : \ \begin{cases} \sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta) \\ \cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta) \end{cases}$$



$$\forall \theta \in \mathbb{R} \ : \ \begin{cases} \sin(\pi-\theta) = \sin(\theta) \\ \cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta) \end{cases}$$



$$\forall \theta \in \mathbb{R} \ : \ \begin{cases} \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos(\theta) \\ \cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta) \end{cases}$$



$$\forall \theta \in \mathbb{R} \ : \ \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos(\theta) \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin(\theta) \end{cases}$$

3 Formules d'addition

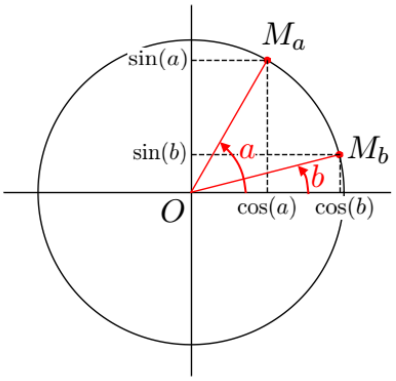
3.1 Formules d'addition de sin et cos

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \text{et} \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\end{array}}$$

dem : Fixons $a, b \in \mathbb{R}$, et considérons les points du plan M_a, d'affixe e^{ia} et M_b, d'affixe e^{ib}, ou autrement dit les points du plan de coordonnées :

$$M_a : \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_b : \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$$



On peut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM_a} \cdot \overrightarrow{OM_b}$ de deux façons différentes :

- à l'aide de la formule avec les coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$, ce qui donne

$$\overrightarrow{OM_a} \cdot \overrightarrow{OM_b} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad (1)$$

- à l'aide de la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\big((\vec{u}, \vec{v})\big)$, ce qui donne :

$$\overrightarrow{OM_a} \cdot \overrightarrow{OM_b} = 1 \times 1 \times \cos(a-b) \qquad (2)$$

L'égalité de (1) et de (2) donne alors :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

Il suffit alors de l'évaluer en $a \in \mathbb{R}$ et en $-b \in \mathbb{R}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \text{(par parité de cos et imparité de sin)}\end{aligned}$$

On a donc la formule d'addition de cos. Pour celle de sin, on peut se servir de l'égalité $\sin(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$, valable pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\big(\tfrac{\pi}{2} - (a+b)\big) \\ &= \cos\big((\tfrac{\pi}{2} - a) + (-b)\big) \\ &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - a)\cos(-b) - \sin(\tfrac{\pi}{2} - a)\sin(-b) \qquad \text{(formule d'addition de cos)} \\ &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \qquad (\text{car } \sin(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta))\end{aligned}$$

On a bien démontré les deux formules.

3.2 Formules de duplication de sin et cos

Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\ \text{et} \\ \sin(2a) = 2\sin a \cos a\end{array}}$$

dem : ces formules s'obtiennent en prenant dans les formules d'addition le cas particulier où $b = a$. Pour $\cos(2a)$, on obtient $\cos^2(a) - \sin^2(a)$, et on est alors libre de remplacer $\sin^2(a)$ par $1 - \cos^2(a)$ pour obtenir la formule suivante, ou bien remplacer $\cos^2(a)$ par $1 - \sin^2(a)$ pour obtenir la dernière.

Remarque importante : les formules

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \qquad \text{et} \qquad \cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$$

servent très fréquemment non pas pour exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$, mais au contraire pour exprimer $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$.

3.3 Formule d'addition de tan

Pour tous réels a, b tels que les quantités $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(a+b)$ sont bien définies (c'est-à-dire tels que ni a, ni b, ni $a+b$ n'est un nombre du type $\frac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$), on a :

$$\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}}$$

dem : Fixons $a, b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. On calcule :

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\ &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \qquad \text{(formules d'addition de cos et sin)}\end{aligned}$$

A ce stade, on divise en haut et en bas dans la fraction par $\cos a \cos b$, qui est bien non nul, puisque a et b sont justement choisis comme étant des valeurs qui n'annulent pas cos. Cela donne :

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}} \\ &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}\end{aligned}$$

4 Congruences

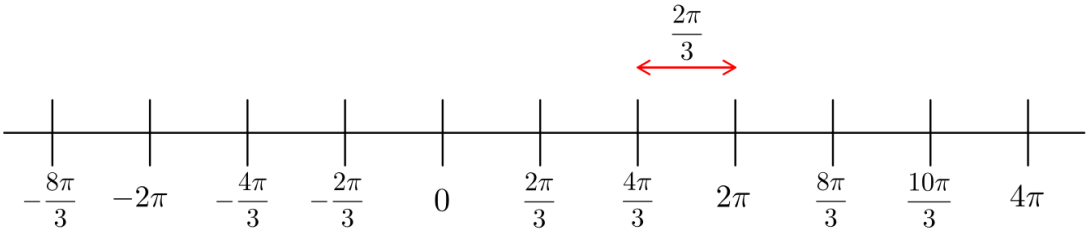
Notation. *Soit $x, y, T \in \mathbb{R}$. On dit que "x est congru à y modulo T", et on note :*

$$x \equiv y \ [T]$$

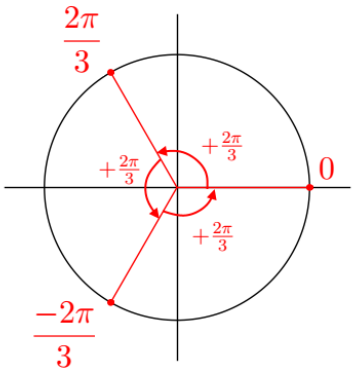
pour signifier :

$$\textit{il existe un entier } k \in \mathbb{Z} \textit{ tel que } \ x = y + k.T$$

Exemple : si $\theta \in \mathbb{R}$, alors la relation de congruence $\theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ signifie que θ est du type $k \cdot \frac{2\pi}{3}$, pour un $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire qu'il appartient à l'un de ces nombres sur l'axe des réels :



ce qui peut également être représenté sur le cercle trigonométrique de la façon suivante :



La représentation sur le cercle trigonométrique ne fait pas la différence entre deux angles congrus l'un à l'autre modulo 2π.

Quelques propriétés connues, exprimées à l'aide de congruences :

- pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence : $e^{ia} = e^{ib} \iff a \equiv b\ [2\pi]$
- pour tous $\theta \in \mathbb{R}$, le nombre $\tan(\theta)$ est bien défini ssi $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.
- pour tous a, b non congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, on a l'équivalence : $\tan(a) = \tan(b) \iff a \equiv b\ [\pi]$.

Propriétés. *Soit $x, y, T \in \mathbb{R}$ tels que $x \equiv y\ [T]$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :*

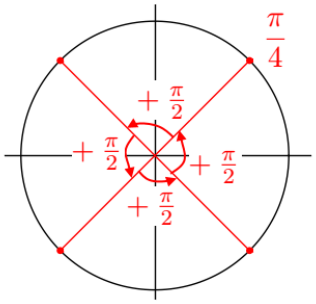
$$x + \lambda \equiv y + \lambda\ [T] \qquad et \qquad \lambda x \equiv \lambda y\ [\lambda T]$$

dem : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ajouter λ ou multiplier par λ dans $x = y + k.T$ donne :

$$(x + \lambda) = (y + \lambda) + kT \qquad \text{et} \qquad \lambda x = \lambda y + k.\lambda T$$

Exemple de manipulation : si $\theta \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \theta \equiv \frac{\pi}{2} - \theta\ [\pi] &\iff 2\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\iff \theta \equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

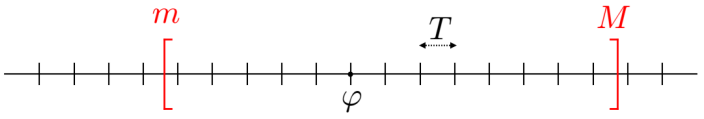


Remarques sur les congruences :

1. Leur seul intérêt est d'abréger les notations.
2. Elles suffisent quand on résout une équation trigonométrique sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais lorsqu'on cherche des angles sur un intervalle $[m, M]$ précis, alors il est nécessaire de savoir passer de $\theta \equiv \varphi\ [T]$ à sa définition :

   $$\exists k \in \mathbb{Z} \ \text{ tq } \ \theta = \varphi + kT$$

   puis de chercher pour quels $k \in \mathbb{Z}$ la quantité $\varphi + kT$ appartient à l'intervalle de recherche $[m, M]$.



   Il s'agit alors de résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $k \in \mathbb{Z}$:

   $$m \leqslant \varphi + kT \leqslant M$$

Cf exo 1

Partie III - Utilisation des complexes en trigonométrie

1 Deux nouveaux outils : formules d'Euler et de Moivre

Proposition. *Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a*

Euler *:*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Moivre *:*

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \qquad \textit{c'est-à-dire} \qquad (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

dem : Pour les formules d'Euler, c'est simplement $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ pour le complexe $z := e^{i\theta}$.

Pour Moivre, on a dans le cas où $n \geqslant 0$,

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = \underbrace{e^{i\theta} \times e^{i\theta} \times \cdots \times e^{i\theta}}_{n \text{ fois}} = e^{i(\theta+\theta+\cdots+\theta)} = e^{in\theta}.$$

Si $n \leqslant 0$, on a alors,

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = \frac{1}{(e^{i\theta})^{-n}} \overset{(-n\geqslant 0)}{=} \frac{1}{e^{i(-n)\theta}} = e^{in\theta}.$$

2 Formules de linéarisation

Vocabulaire. *«Linéariser» un produit de sinus et de cosinus signifie le mettre sous forme d'une somme — ou plutôt d'une combinaison linéaire — de sinus et de cosinus.*

Ceci peut s'avérer très pratique pour dériver ou déterminer une primitive.
On repart de

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \tag{1a}$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \tag{2a}$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \tag{1b}$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \tag{2b}$$

En effectuant alors,
— «$\frac{(1a)+(2a)}{2}$» on obtient $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$,
— «$\frac{(2a)-(1a)}{2}$» on obtient $\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$,
— «$\frac{(1b)+(2b)}{2}$» on obtient $\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$.
Cf exo 2

On peut linéariser des quantités du type $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ à l'aide des formules d'Euler et du binôme de Newton. On a par exemple, pour tout réel x,

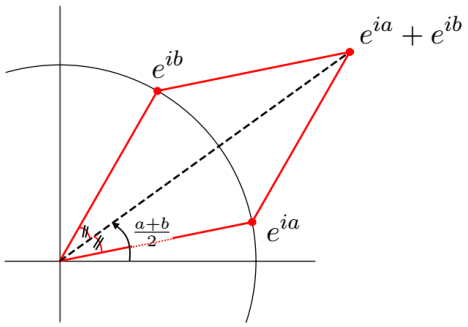
$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)
\end{aligned}$$

Exercice : linéariser de même $\sin^3(x)$ pour tout réel x.

3 Formule de l'angle milieu et formules de factorisation

Lemme. ♥ *Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors on a*

- $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$



- $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$

dem : en ≪forçant≫ la factorisation par l'≪angle milieu≫ on obtient

- $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \underbrace{\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)}_{=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$
- $e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \underbrace{\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)}_{=2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}$

Deux exemples classiques : soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a, en remarquant que $1 = e^{i.0}$:

- $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

Conséquence de ce lemme : formules trigonométriques de factorisation ♥

Vocabulaire. ≪*Factoriser*≫ *une somme de cosinus et de sinus consiste à l'écrire sous forme d'un produit de cosinus et de sinus.*

Ceci peut s'avérer très pratique pour déterminer un signe par exemple.
Pour factoriser $\cos(a) + \cos(b)$ et $\sin(a) + \sin(b)$, on identifie parties réelle et imaginaire dans

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

où

— d'une part : $e^{ia} + e^{ib} = (\cos(a) + \cos(b)) + i\,(\sin(a) + \sin(b))$,
— et d'autre part

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}} &= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + i\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + i2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Pour $\cos(a)-\cos(b)$, on procède de même :

$$\begin{aligned} e^{ia}-e^{ib} &= 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \\ &= 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)+i\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \\ &= 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)-2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

et on a aussi $e^{ia}-e^{ib}=\cos(a)-\cos(b)+i\left(\sin(a)-\sin(b)\right)$ ce qui livre en identifiant les parties réelles

$$\cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

4 Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(kt)$ ♥

Soit $t\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. On cherche à calculer les deux sommes suivantes :

$$C(t) := \sum_{k=0}^{n}\cos(kt) \qquad \text{et} \qquad S(t) := \sum_{k=0}^{n}\sin(kt).$$

Pour ce faire, on pose

$$f(t) := \sum_{k=0}^{n}e^{ikt} \quad \text{de sorte que} \quad \begin{cases} C(t)=\mathrm{Re}(f(t)) & (\text{car } \mathrm{Re}(\sum\ldots)=\sum\mathrm{Re}(\ldots)) \\ S(t)=\mathrm{Im}(f(t)) & (\text{idem Im}) \end{cases}$$

Or, la somme qui définit $f(t)$ est géométrique, de raison e^{it}, car par la formule de Moivre, $e^{ikt}=\left(e^{it}\right)^k$. On va donc calculer $f(t)$, et enfin identifier ses parties réelle et imaginaire.

- Si la raison e^{it} vaut 1, c'est-à-dire si t est du type $2p\pi$, pour un $p\in\mathbb{Z}$, alors

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}1^k=n+1$$

  et donc $\boxed{C(t)=n+1}$ et $\boxed{S(t)=0}$
- Si $e^{it}\neq 1$, c'est-à-dire si $\forall p\in\mathbb{Z}$, $t\neq 2p\pi$, alors :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} && \text{(formule somme géom de raison } \neq 1) \\ &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}t}-e^{i\frac{n+1}{2}t}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}\right)} && \text{(factorisation angle milieu)} \\ &= e^{i\left(\frac{n+1}{2}t-\frac{t}{2}\right)}\frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{-2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)} && \text{(formule d'Euler et quotient d'exp)} \\ &= e^{i\frac{n}{2}t}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \left(\cos\left(\frac{n}{2}t\right)+i\sin\left(\frac{n}{2}t\right)\right)\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}_{\text{réel}} \end{aligned}$$

En développant et en séparant partie réelle et imaginaire, on trouve donc dans le cas où $e^{it}\neq 1$:

$$\boxed{C(t)=\cos\left(\frac{n}{2}t\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{S(t)=\sin\left(\frac{n}{2}t\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$$

5 Combinaison linéaire d'un cos et d'un sin de même pulsation

Si a et b désignent deux constantes réelles, on peut transformer une expression du type

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

en une expression du type

$$X_m\cos(\omega t + \varphi)$$

où X_m et φ sont deux constantes ($X_m \geqslant 0$).

Une façon (parmi d'autres) de procéder est de forcer la factorisation par $\sqrt{a^2+b^2}$, ce qui est possible dès qu'au moins l'une des deux valeurs a ou b est non nulle, un peu comme quand on veut déterminer la forme trigonométrique de $a+ib$. C'est cette quantité $\sqrt{a^2+b^2}$ qui sera notre X_m.

$$\begin{aligned} a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) &= \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{=:X_m}\left(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{=:\widetilde{a}}\cos(\omega t) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{=:\widetilde{b}}\sin(\omega t)\right) \\ &= X_m\big(\widetilde{a}\cos(\omega t) + \widetilde{b}\sin(\omega t)\big) \end{aligned}$$

Les nouvelles constantes $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ vérifient $\widetilde{a}^2+\widetilde{b}^2 = 1$, c'est une simple vérification. Cela assure qu'il existe un angle $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\widetilde{a} = \cos(\varphi) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{b} = \sin(\varphi)$$

car cela signifie que le complexe $\widetilde{a} + i\widetilde{b}$ est de module 1 (exactement comme quand on veut déterminer la forme trigonométrique de $a+ib$). On a ainsi :

$$\begin{aligned} a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) &= X_m\big(\cos(\varphi)\cos(\omega t) + \sin(\varphi)\sin(\omega t)\big) \\ &= X_m\cos(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

On a la forme voulue, quitte à poser $\widetilde{\varphi} := -\varphi$ si on le souhaite.

Partie IV - Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

1 Racines carrées d'un complexe

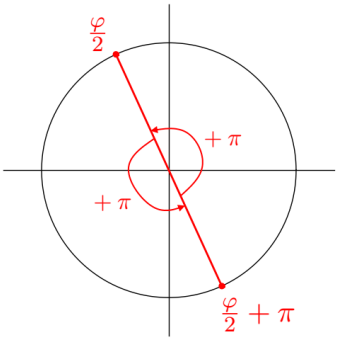
Définition (Racines carrées d'un complexe)**.** *Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On dit qu'un complexe z est une racine carrée de ω si $z^2 = \omega$.*

Proposition. *Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées complexes, et ces deux racines carrées sont l'opposée l'une de l'autre.*

dem : Fixons $\omega \in \mathbb{C}^*$ pour lequel on dispose de $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\omega = \rho e^{i\varphi}$.
On résout donc l'équation $z^2 = \omega$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. $z = 0$ n'est pas solution donc on se contente de chercher les solutions parmi les complexes non nuls. Cherchons z sous sa forme trigonométrique en posant $z = re^{i\theta}$, où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ sont nos nouvelles inconnues. On procède par équivalences :

$$\begin{aligned}
z^2 = \omega &\iff (re^{i\theta})^2 = \rho e^{i\varphi} \\
&\iff r^2 e^{i2\theta} = \rho e^{i\varphi} \\
&\iff \begin{cases} r^2 = \rho & \text{(identification du module)} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } 2\theta = \varphi + 2k\pi & \text{(”identification” de l'argument)} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = \sqrt{\rho} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \theta = \frac{\varphi}{2} + k\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

Or, les angles $\frac{\varphi}{2} + k\pi$ sont les suivants :



Les solutions sont donc

$$\sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\rho} e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)} = -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

Cf exo 8,9

Remarque. *On ne sait pas, dans $\mathbb{C}$, privilégier l'une des deux racines carrées d'un complexe z non nul, contrairement à ce qui passe dans le cas où z est un réel positif x, où ses deux racines sont également réelles mais une seule est positive, et c'est elle qu'on note $\sqrt{x}$. Sans hypothèse sur le complexe z, la notation $\sqrt{z}$ n'a aucun sens et on doit se contenter de parler d'UNE racine carrée du complexe z.*

2 Résolution de l'équation du second degré

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation d'inconnue complexe z,

$$az^2 + bz + c = 0.$$

On cherche à transformer l'expression $az^2 + bz + c$ en faisant apparaître z dans un unique carré pour se ramener au cas de la recherche d'une racine carrée. On peut procéder ainsi en «forçant» l'utilisation d'une identité remarquable :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c =& a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\ =& a\left(\left(z + \underbrace{\frac{b}{2a}}_{\text{pour le double produit}}\right)^2 - \underbrace{\frac{b^2}{4a^2}}_{\text{pour compenser}} + \frac{c}{a}\right) \qquad \text{"forme canonique"} \\ =& a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{C}$, on peut fixer un complexe δ tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$ ce qui permet d'obtenir la forme **factorisée** du trinôme :

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) = a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right).$$

Cette forme factorisée livre alors la solution, car on a

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 \quad &\iff \quad z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} = 0 \\ &\iff \quad z = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b - \delta}{2a} \end{aligned}$$

Théorème (Trinôme du second degré)**.** *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation d'inconnue complexe z,*

$$az^2 + bz + c = 0.$$

On note $\Delta := b^2 - 4ac$, appelé discriminant. De deux choses l'une :

- *ou bien $\Delta = 0$ et l'équation admet pour unique solution $z_0 := \frac{-b}{2a}$ et on a pour tout complexe z,*

$$az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$$

- *ou bien $\Delta \neq 0$ et possède une racine carrée complexe non nulle δ et alors l'équation admet les deux solutions*

$$z_1 := \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 := \frac{-b - \delta}{2a}$$

et pour tout complexe z, on a

$$az^2 + bz + c = a\,(z - z_1)\,(z - z_2).$$

Remarques.

- *Dans le cas où a, b et c sont réels, on retrouve bien le résultat de Terminale avec la discussion sur le signe du discriminant Δ : s'il est positif, on peut prendre $\sqrt{\Delta}$ pour racine carrée, et s'il est négatif, on peut prendre $i\sqrt{-\Delta}$. Dans ce dernier cas, on remarque que z_1 et z_2 sont conjugués.*
- *On verra ultérieurement que la «factorisation par une racine du polynôme» se généralise à des degrés quelconques : si un complexe α vérifie $P(\alpha) = 0$ pour un certain polynôme P de degré $n \geqslant 1$, alors il existe un polyôme Q de degré $n - 1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z).$$

► *Avec les notations précédentes (quitte à poser $(z_1, z_2) := (z_0, z_0)$ dans le cas où $\Delta = 0$), si l'on pose :*

$$\begin{cases} s := z_1 + z_2 & \textit{(somme des racines)} \\ p := z_1 z_2 & \textit{(produit des racines)} \end{cases}$$

alors on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a(z - z_1)(z - z_2) \\ &= a(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2) \\ &= a\big(z^2 - sz + p\big) \end{aligned}$$

Autrement dit, après factorisation par le coefficient dominant a :
- *p est le coefficient constant du polynôme ;*
- *s est l'opposé du coefficient en z.*

Nous verrons que ce théorème admet une généralisation aux polynômes de degré quelconque.

3 Racines n-ièmes de l'unité (puis d'un nombre complexe quelconque)

Dans tout ce paragraphe n désigne un entier naturel non nul.

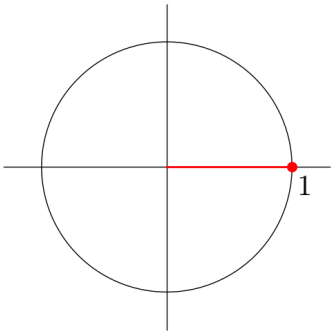
Définition (Racines n-ièmes d'un complexe, de l'unité)**.** *Soit a un complexe. On dit qu'un complexe z est une racine n-ième de a si $z^n = a$. On dit que c'est une racine n-ième de l'unité si $z^n = 1$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.*

Exemples :

► Déterminons $\mathbb{U}_1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^1 = 1 \iff z = 1$$

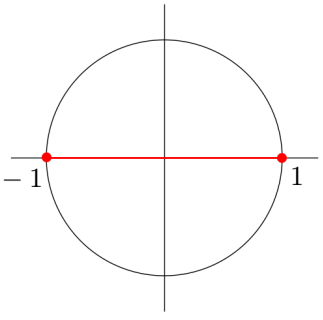
donc $\mathbb{U}_1 = \{1\}$.



► Déterminons $\mathbb{U}_2$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

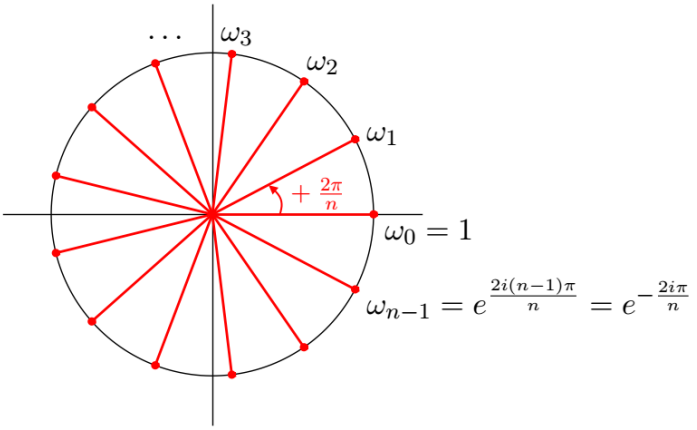
$$z^2 = 1 \iff z = 1 \quad \text{ou} \quad z = -1$$

donc $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$.



Théorème (Description des racines n-ièmes de l'unité ♥)**.** *Soit n un entier naturel non nul. Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité qui sont les complexes ω_k définis par*

$$\omega_k := e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!].$$



De plus, ω_1 est un «générateur» de ces nombres au sens où

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \omega_k = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \omega_1^k.$$

dem : puisque $n \neq 0$, 0 n'est pas racine n-ième de l'unité et on cherche à résoudre $z^n = 1$ avec l'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z \in \mathbb{U}_n &\iff z^n = 1 \\
&\iff \left(re^{i\theta}\right)^n = 1 \\
&\iff r^n e^{in\theta} = 1e^{i0} \\
&\iff \begin{cases} r^n = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } n\theta = 2k\pi \end{cases} && \text{en identifiant modules et arguments} \\
&\iff \begin{cases} r = 1 \qquad (\text{car } r \in \mathbb{R}_+) \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

Or, en notant $\omega_k := e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ (pour tout $k \in \mathbb{Z}$), on remarque alors que

$$\{\omega_k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\omega_k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

car la suite des ω_k est n-périodique. En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\omega_{k+n} = e^{i\frac{2(k+n)\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \underbrace{e^{i\frac{2n\pi}{n}}}_{=1} = \omega_k.$$

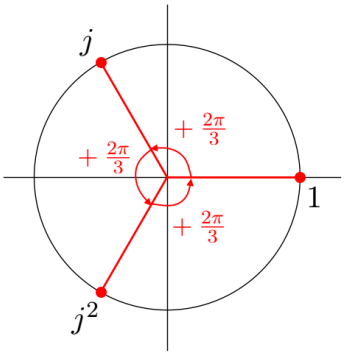
Il reste enfin à justifier que les ω_k, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont bien distincts, ce qui se voit géométriquement : ce sont n points distincts sur le cercle car

$$0 < \frac{2\pi}{n} < 2\frac{2\pi}{n} < \cdots < (n-1)\frac{2\pi}{n} < 2\pi.$$

Exemples :

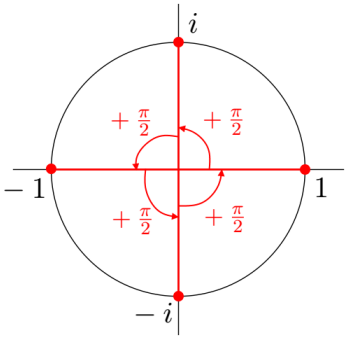
► Explicitons $\mathbb{U}_3$. D'après la proposition précédente on a

$$\mathbb{U}_3 = \left\{ e^{i0\frac{2\pi}{3}}, \underbrace{e^{i1\frac{2\pi}{3}}}_{=:j}, e^{i2\frac{2\pi}{3}} \right\} = \left\{1, j, j^2\right\}.$$

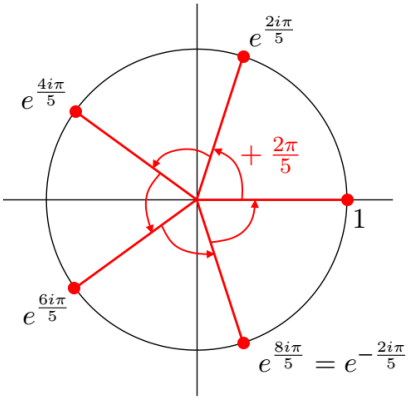


► Explicitons $\mathbb{U}_4$. D'après la proposition précédente on a

$$\mathbb{U}_4 = \left\{ e^{i0\frac{2\pi}{4}}, \underbrace{e^{i1\frac{2\pi}{4}}}_{=i}, e^{i2\frac{2\pi}{4}}, e^{i3\frac{2\pi}{4}} \right\} = \left\{1, i, i^2, i^3\right\} = \left\{1, i, -1, -i\right\}.$$



► De même, on représente $\mathbb{U}_5$ ci-dessous.



Proposition. ♥ *Pour $n \geqslant 2$, la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ vaut 0. Autrement dit,*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0.$$

dem : fixons $n \geqslant 2$. On se souvient que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = \omega_1^k$ où $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$ car $n \geqslant 2$. On a alors par somme d'une progression géométrique

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = \frac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1} = 0 \quad \text{car} \quad \omega_1^n = 1.$$

Cf exo 14

Corollaire (Description des racines n-ièmes d'un complexe non nul)**.**
Soit z_0 un complexe non nul. Il existe exactement n racines n-ièmes de z_0. En outre, si $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ avec $r_0 > 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$, alors les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = z_0$ sont les :

$$\omega_k(z_0) = \underbrace{\left(\sqrt[n]{r_0}\, e^{i\theta_0/n}\right)}_{\substack{\text{une racine } n\text{-ième} \\ \text{évidente de } z_0}} \times \underbrace{\omega_k}_{\substack{\text{racines } n\text{-ièmes} \\ \text{de l'unité}}} \qquad \text{avec } k \in [\![0, n-1]\!]$$

dem : on peut très bien adapter la démonstration sur les racines n-ièmes de l'unité, en reprenant les mêmes arguments, mais voici une façon plus élégante :

Le nombre complexe $b := \sqrt[n]{r_0} e^{i\frac{\theta_0}{n}}$ est bien une racine n-ième de z_0 car

$$b^n \;=\; \left(\sqrt[n]{r_0} e^{i\frac{\theta_0}{n}}\right)^n \;=\; (\sqrt[n]{r_0})^n \left(e^{i\frac{\theta_0}{n}}\right)^n \;=\; r_0 e^{i\theta_0} \;=\; z_0$$

On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z^n = z_0 \quad &\iff \quad z^n = b^n \\
&\iff \quad \left(\frac{z}{b}\right)^n = 1 \qquad (b \neq 0 \text{ car } r_0 > 0) \\
&\iff \quad \frac{z}{b} \in \mathbb{U}_n \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tq } \frac{z}{b} = \omega_k \qquad (\text{par théorème sur } \mathbb{U}_n) \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tq } z = b\,\omega_k
\end{aligned}$$

ce qui est bien la forme annoncée.

Exercice : Déterminer — et dessiner — les complexes z tels que $z^4 = \dfrac{9\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9}{2}i$.

Un exercice très classique ♥ : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les complexes z tels que

$$(i+z)^n = (i-z)^n$$

Idée : diviser par $(i-z)^n$ pour se ramener à une équation du type $A^n = 1$ et utiliser le théorème sur les racines n-ièmes de l'unité. Mais pour diviser par $(i-z)$, il faut commencer par évacuer le cas où $z = i$.

Solution : soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = i$, alors $(i+z)^n = (2i)^n \neq 0 = (i-i)^n$ car $n \neq 0$ donc i n'est pas solution. On suppose désormais $z \neq i$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(i+z)^n = (i-z)^n \quad &\iff \quad \left(\frac{i+z}{i-z}\right)^n = 1 \\
&\iff \quad \frac{i+z}{i-z} \in \mathbb{U}_n \\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \text{tq } \frac{i+z}{i-z}\,(=\omega_k) = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{d'après le théorème précédent.}
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\frac{i+z}{i-z} = \omega_k \quad &\iff \quad i+z = i\omega_k - \omega_k z \\
&\iff \quad z(1+\omega_k) = i(\omega_k - 1)
\end{aligned}$$

et pour isoler l'inconnue z, il s'agit de déterminer s'il est possible que $\omega_k = -1$ pour envisager de diviser par $1+\omega_k$. Dit autrement, -1 peut-il être une racine n-ièmes de l'unité ? Cette question signifie exactement : $(-1)^n$ vaut-il 1 ? La réponse est «non» si n est impair et «oui» si n est pair, auquel cas ω_k vaut -1 pour $k = \frac{n}{2}$ (à méditer). Mais dans ce cas, la dernière égalité dans les équivalences précédentes est

$$z \times 0 = -i \times 2$$

ce qui est faux. On exclut donc ce cas et on poursuit les équivalences valables pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $2k \neq n$:

$$z(1+\omega_k) = i(\omega_k - 1) \quad \iff \quad z = i\frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1}$$

On peut alors calculer avec l'angle milieu

$$i\frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1} = i\frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1} = i\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n}} 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Finalement, les solutions sont donc les $-\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $k \neq \frac{n}{2}$.

Partie V - Dérivation d'une fonction à valeurs complexes (et à variable réelle)

1 Préliminaire : l'exponentielle complexe générale

Définition. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note e^z, ou encore $\exp(z)$ le nombre complexe :*

$$e^z := e^{\mathrm{Re}(z)} \times e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$$

$e^{\mathrm{Re}(z)}$: exp réelle classique

$e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$: notation d'un élément de $\mathbb{U}$: $\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))$

Remarques :

- La fonction $z \mapsto e^z$ ainsi définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:
  - prolonge l'exponentielle classique, car si $z \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Im}(z) = 0$, et donc $e^{i\,\mathrm{Im}(z)} = 1$.
  - est compatible avec la notation $e^{i\theta}$ puisque si $z = i\theta$ (imaginaire pur), alors $\mathrm{Re}(z) = 0$, et donc $e^{\mathrm{Re}(z)} = 1$.
- Le module de e^z est clairement $e^{\mathrm{Re}(z)}$. Un argument de e^z est $\mathrm{Im}(z)$.
- Si $a, b \in \mathbb{R}$, on a par définition :

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$$

Propriétés. *Pour tous $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:*

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$
- $e^z \neq 0$
- $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$

dem : simples vérifications avec la définition.

2 Dérivation d'une fonction à valeurs complexes

Introduction :

Une fonction complexe à variable réelle est une fonction $f : D \to \mathbb{C}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$.

⚠ Pour tout $t \in D$, le nombre $f(t)$ est complexe, mais t est réel.

Exemples :

$$f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \ln(t) + t^2 + ie^{4t} + 2it \end{array} \right. \qquad f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{2it} \end{array} \right. \qquad f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{(1+3i)t} \end{array} \right.$$

Remarque fondamentale : si pour tout $t \in D$ on note :

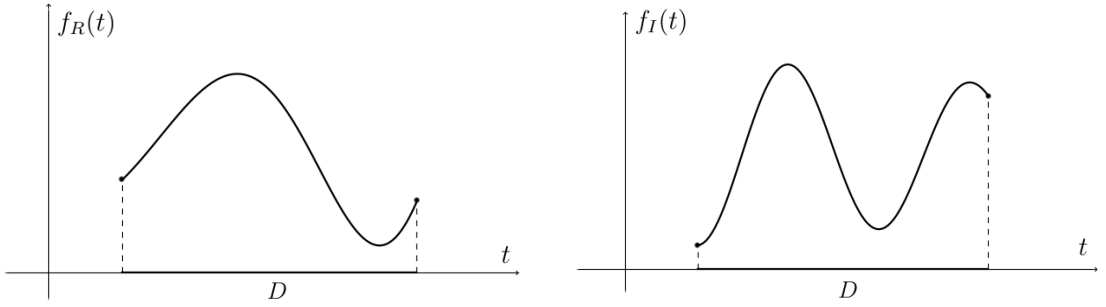
$$f_R(t) = \mathrm{Re}\big(f(t)\big) \qquad \text{et} \qquad f_I(t) = \mathrm{Im}\big(f(t)\big)$$

on définit ainsi deux fonctions f_R et f_I de D dans $\mathbb{R}$, telles que :

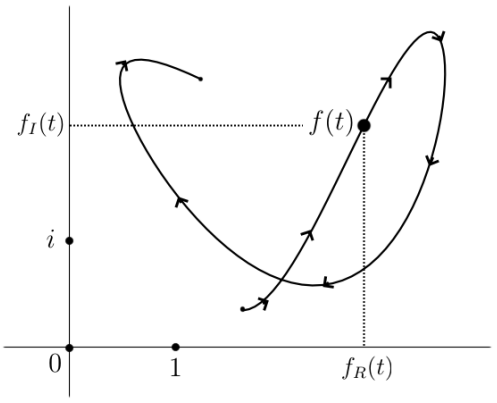
$$\boldsymbol{f(t) = f_R(t) + i f_I(t)}$$

Autrement dit, une fonction à valeurs complexes peut être vue comme la donnée de deux fonctions à valeurs réelles.

Il y a plusieurs façons de représenter géométriquement une telle fonction. On peut par exemple considérer séparément le graphe de sa partie réelle et de sa partie imaginaire :



ou bien aussi représenter dans le plan complexe la trajectoire que prennent les valeurs $f(t) \in \mathbb{C}$ lorsque t décrit D :



Définition. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est **dérivable** sur I lorsque sa partie réelle f_R **et** sa partie imaginaire f_I sont dérivables sur I. Dans ce cas, on définit pour tout $t \in I$:*

$$\boldsymbol{f'(t) := f'_R(t) + i f'_I(t)}$$

Remarque. *Par définition, on a donc :* $\begin{cases} Re(f') = \big(Re(f)\big)' \\ Im(f') = \big(Im(f)\big)' \end{cases}$

Exemple : étudions la dérivabilité et dérivons f_1, f_2 et f_3.
Pour f_1, on a

$$\mathrm{Re}(f_1) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(t) + t^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f_1) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{4t} + 2t \end{array}$$

qui sont dérivables par opérations usuelles. Ainsi f_1 est dérivable et pour tout réel t strictement positif,

$$f_1'(t) = \mathrm{Re}(f_1)'(t) + i\,\mathrm{Im}(f_1)'(t) = \frac{1}{t} + 2t + i\left(4e^{4t} + 2\right).$$

Pour f_2, remarquons que pour tout réel t, $f_2(t) = \cos(2t) + i\sin(2t)$ et donc $\mathrm{Re}(f_2)(t) = \mathrm{Re}(f_2(t)) = \cos(2t)$ et $\mathrm{Im}(f_2)(t) = \mathrm{Im}(f_2(t)) = \sin(2t)$. Ainsi $\mathrm{Re}(f_2)$ et $\mathrm{Im}(f_2)$ sont dérivables et donc f_2 l'est et en outre pour tout réel t, on a

$$f_2'(t) = \mathrm{Re}(f_2)'(t) + i\,\mathrm{Im}(f_2)'(t) = -2\sin(2t) + i2\cos(2t) = 2i(\cos(2t) + i\sin(2t)) = 2ie^{i2t}.$$

Enfin, pour f_3, remarquons que pour tout réel t, $f_3(t) = e^t(\cos(3t) + i\sin(3t))$ et donc $\mathrm{Re}(f_2)(t) = \mathrm{Re}(f_2(t)) = e^t\cos(3t)$ et $\mathrm{Im}(f_3)(t) = \mathrm{Im}(f_3(t)) = e^t\sin(3t)$. Ainsi $\mathrm{Re}(f_3)$ et $\mathrm{Im}(f_3)$ sont dérivables et donc f_3 l'est et en outre pour tout réel t, on a

$$\begin{aligned} f_3'(t) =& \mathrm{Re}(f_3)'(t) + i\,\mathrm{Im}(f_3)'(t) \\ =& e^t(\cos(3t) - 3\sin(3t)) + ie^t(\sin(3t) + 3\cos(3t)) \\ =& e^t(\cos(3t) + i\sin(3t) + 3i(\cos(3t) + i\sin(3t))) \\ =& e^t\left(e^{i3t} + 3ie^{i3t}\right) \\ =& (1+3i)e^{t+3it} = (1+3i)e^{t(1+3i)}. \end{aligned}$$

Propriétés. *Soit I un intervalle et u et v deux fonctions de I dans $\mathbb{C}$ dérivables. Alors :*

- *$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λu est dérivable, et $(\lambda u)' = \lambda u'$;*
- *$u+v$ est dérivable, et $(u+v)' = u' + v'$;*
- *uv est dérivable, et $(uv)' = u'v + uv'$;*
- *si v ne s'annule pas, $\frac{u}{v}$ est dérivable et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.*

pour la dem : on peut par exemple poser $u = u_R + iu_I$ et $v = v_R + iv_I$, puis séparer partie réelle et partie imaginaire dans ces égalités pour vérifier qu'elles sont vraies. Ce n'est pas la méthode la plus élégante, mais elle fonctionne.

Exemple : $g \ : \ t \mapsto \frac{(1+i)}{2i}(t^2 - i)$. Inutile de séparer parties réelle et imaginaire pour dériver g :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{t}}\left[\frac{(1+i)}{2i}(\mathbf{t}^2 - i)\right] = \frac{(1+i)}{2i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{t}}(\mathbf{t}^2 - i) = \frac{(1+i)}{2i} \times 2\mathbf{t}$$

Remarque. *Aucun problème pour généraliser $+$, $-$, $\times$ et $\div$ dans $\mathbb{C}$. En revanche, on ne peut pas parler de composition de fonctions complexes. En effet, si f et u sont deux fonctions complexes, alors pour t réel, le nombre $u(t)$ est complexe (pas forcément réel), donc le nombre $f\big(u(t)\big)$ n'a pas de sens en général.*
En particulier, pas de formule $\big(f(u)\big)' = f'(u) \times u'$.

SAUF EXCEPTION pour $f = \exp$! En effet, on a étendu l'ensemble de définition de $\exp$ à $\mathbb{C}$ tout entier, donc si u est une fonction complexe, on peut tout à fait considérer la fonction e^u.
Aurait-on par hasard $(e^u)' = e^u \times u'$? Réponse : OUI !

Théorème. *Soit I un intervalle et $u \ : \ I \to \mathbb{C}$ une fonction complexe dérivable. Alors e^u est dérivable, et*

$$(\mathbf{e^u})' = \mathbf{e^u} \times \mathbf{u'}.$$

pour la dem : on peut par exemple poser $u = u_R + iu_I$, séparer partie réelle et partie imaginaire dans e^u, puis dériver pour vérifier que l'égalité $(e^u)' = e^u \times u'$ est bien vérifiée.

Exemple : (re-)dérivons f_2 et f_3.

En appliquant la proposition, on obtient directement la dérivabilité de ces deux fonctions et aussi, pour tout réel t,

$$f_2'(t) = 2ie^{2it} \quad \text{et} \quad f_3'(t) = (1+3i)e^{(1+3i)t}.$$

Application à une calcul de primitive : déterminons une primitive de $f \ : \ t \mapsto e^t \cos(2t)$. ♥

Commençons par remarquer que pour tout réel t,

$$e^t \cos(2t) = \underbrace{e^t}_{\in\mathbb{R}} \mathrm{Re}(e^{i2t}) = \mathrm{Re}\left(e^t e^{i2t}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{t(1+2i)}\right).$$

Il suffit alors de connaître une primitive G de $g : t \mapsto e^{t(1+2i)}$, car alors $\mathrm{Re}(G)' = \mathrm{Re}(G') = \mathrm{Re}(g) = f$. Or poser $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{e^{t(1+2i)}}{1+2i}$ donne bien une primitive de g dont la partie réelle est

$$t \mapsto \mathrm{Re}\left(\frac{e^{t(1+2i)}}{1+2i}\right) = \frac{e^t}{1^2+2^2}\mathrm{Re}\left(e^{i2t}(1-2i)\right) = \frac{e^t}{5}\left(\cos(2t) + 2\sin(2t)\right).$$

Finalement $t \mapsto \frac{e^t}{5}\left(\cos(2t) + 2\sin(2t)\right)$ est une primitive de f.

Exercice : déterminer une primitive de $f \ : \ t \mapsto e^{-t}\sin(t)$. ♥